PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

MATEMATIKA REKAYASA

TL 2103

Courtesy : Rofiq Iqbal dan Kania Dewi

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

- Persamaan Umum

$$a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+d\frac{\partial\theta}{\partial x}+e\frac{\partial\theta}{\partial y}+f\theta+g=0$$

- Menyatakan bagaimana variabel tak bebas Ø berubah terhadap variabel bebas x,y. Disini a,b,c,d,e,f, dan g mungkin merupakan fungsi dari Ø

Jenis2 PDP

- Ditentukan oleh harga b^2-4ac
  - < 0, eliptic
  - $= 0$, parabolic
  - > 0, hyperbolic
- Adveksi…
- Difusi….
- Gelombang…

JENIS-JENIS PDP

A. Persamaan Differensial Parabolik

➔ Biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan parabolik paling sederhana adalah perambatan panas.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Penyelesaian dari persamaan di atas adalah mencari temperatur T untuk nilai x pada setiap waktu t.

B. Persamaan Differensial Eliptik

➔ Biasanya berhubungan dengan masalah kesetimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Seperti aliran air tanah di bawah bendungan dan karena adanya pemompaan, defleksi plat akibat pembebanan, dsb.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

C. Persamaan Differensial Hiperbolik

➔ Biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi diskontinue dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi discontinue dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Kondisi batas

- Dirichlet atau fixed boundary,

  misal $C(0) = Co$
- Neuman atau natural boundary,

  misal $dC/dx = 0$
- Robin boundary condition,

  misal $dC/dx + C = 0$

- Penerapan dalam finite difference dengan menambahkan imaginary node

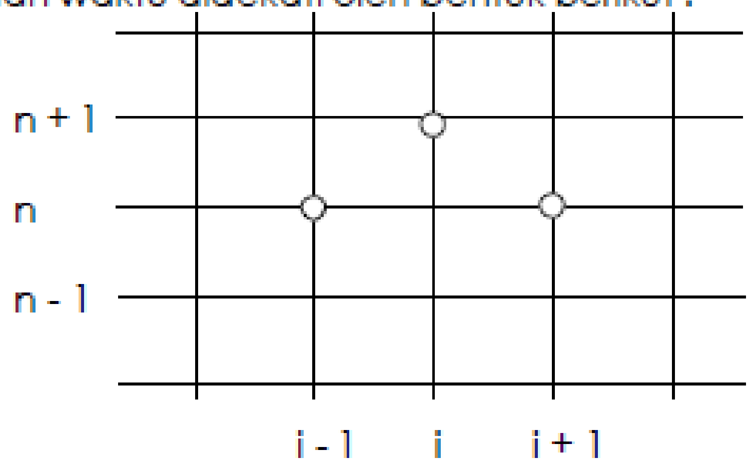
penyelesaian persamaan parabolik dengan skema eksplisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6.1)$$

dengan :

T = temperatur
K = koefisien konduktivitas
t = waktu
x = jarak

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu *n+1* dihitung berdasarkan variabel pada waktu *n* yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema seperti di bawah ini, fungsi f(x,t) dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut :



$$f\ (x,\ t) = f_i^{\,n}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f^2(x,t)}{\partial t^2} = \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta t^2}$$

SEHINGGA…

persamaan diferensial,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{......(6.1)}$$

ditulis dalam bentuk metode beda hingga,

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K_i \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

atau

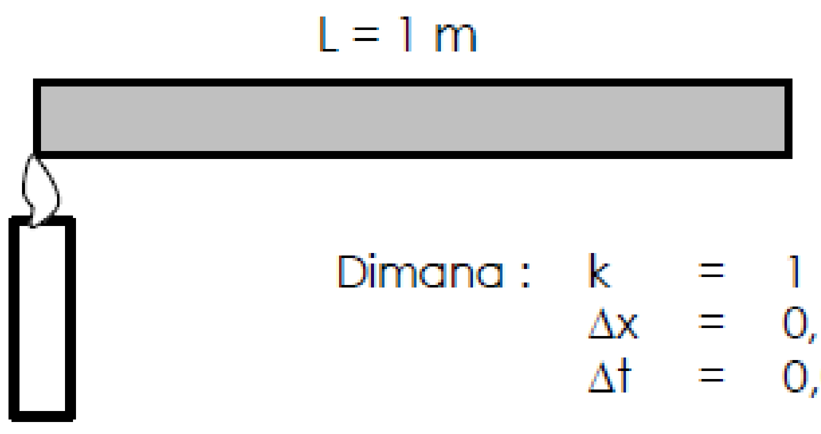
$$T_i^{n+1} = T_i^n + K_i \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right) \qquad \text{.......(6.2)}$$

Stabilitas skema eksplisit

Dalam skema eksplisit, T_i^n tergantung pada tiga titik sebelumnya yaitu: T_{i-1}^{n-1}, T_i^{n-1} dan T_{i+1}^{n-1}. Keadaan ini dapat menyebabkan ketidakstabilan dari skema tersebut, yang berupa terjadinya amplifikasi hasil hitungan dari kondisi awal. Agar stabil dibutuhkan suatu syarat yaitu :

$$0 < \pi < ½ \quad \text{dengan} \quad \pi = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} k$$

Contoh:



Dimana : $k = 1$
$\Delta x = 0,1$
$\Delta t = 0,001$

$$\pi = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} k = \frac{0,001}{0,1^2} = 0,1 < 0,5 \text{ (stabil)}$$

Syarat batas : pada $t = 0$; $T = 2x$; $0 \le x \le ½L$
$T = 2(1\text{-}x)$; $½L \le x \le L$

Dengan menggunakan persamaan (6.2), hitungan dilakukan dari i = 2 sampai dengan 5 dan dari n = 1 sampai waktu yang dikehendaki (N). Untuk n = 1 dan i bergerak dari i = 2 sampai i = 6,

$$T_2^1 = 0{,}2 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0 - 2 \,.\, 0{,}2 + 0{,}4) = 0{,}2$$

$$T_3^1 = 0{,}4 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}2 - 2 \,.\, 0{,}4 + 0{,}6) = 0{,}4$$

$$T_4^1 = 0{,}6 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}4 - 2 \,.\, 0{,}6 + 0{,}8) = 0{,}6$$

$$T_5^1 = 0{,}8 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}6 - 2 \,.\, 0{,}8 + 1) = 0{,}8$$

$$T_6^1 = 1 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}8 - 2 \,.\, 1 + 0{,}8) = 0{,}96$$

untuk n = 2 dan i bergerak dari i =2 sampai i = 6,

$$T_2^2 = 0{,}2 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0 - 2 \,.\, 0{,}2 + 0{,}4) = 0{,}2$$

$$T_3^2 = 0{,}4 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}2 - 2 \,.\, 0{,}4 + 0{,}6) = 0{,}4$$

$$T_4^2 = 0{,}6 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}4 - 2 \,.\, 0{,}6 + 0{,}8) = 0{,}6$$

$$T_5^2 = 0{,}8 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}6 - 2 \,.\, 0{,}8 + 0{,}96) = 0{,}796$$

$$T_6^2 = 0{,}96 + 1 \,.\, 0{,}1 \,.\, (0{,}8 - 2 \,.\, 0{,}96 + 0{,}8) = 0{,}928$$

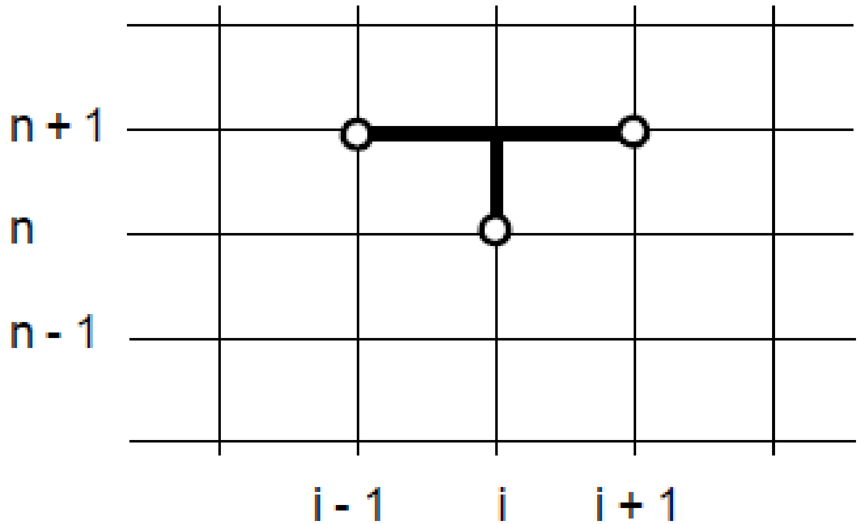
Demikian perhitungan terus dilanjutkan s/d waktu yang dikehendaki (N).

Tabel hasil skema eksplisit

i = x =	1 0	2 0.1	3 0.2	4 0.3	5 0.4	6 0.5	7 0.6
t = 0	**0**	**0.2**	**0.4**	0.6	0.8	1	0.8
t = 0,001	0	**0.2**	0.4	0.6	0.8	0.96	0.8
t = 0,002	0	0.2	0.4	0.6	0.796	0.928	0.796
t = 0,003	0	0.2	0.4	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
t = N	N	N	N	N	N	N	N

Dalam skema eksplisit, ruas kanan dari persamaan ditulis pada waktu *n* yang nilainya sudah diketahui. Sedangkan pada skema implisit, ruas kanan tersebut ditulis pada waktu *n*+1 di mana nilainya belum diketahui.

Gambar di bawah ini menunjukkan jaringan titik simpul dari skema implisit. Dengan menggunakan skema tersebut, fungsi *f*(x,t) dan turunannya dalam ruang waktu didekati oleh bentuk berikut ini.



$$f(x,t) = f_i^n \text{ atau } = f_i^{n+1}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{?\, t}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2 \cdot ?\, x}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{?\, x^2}$$

penyelesaian persamaan parabolik dengan skema implisit

Dengan menggunakan skema di atas, maka dapat dibentuk persamaan dalam bentuk beda hingga :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{?\,t} = K_i\,\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{?\,x^2}$$

$$\frac{1}{?\,t} T_i^{n+1} - \frac{K_i}{?\,x^2} T_{i-1}^{n+1} + \frac{2 \cdot K_i}{?\,x^2} T_i^{n+1} - \frac{K_i}{?\,x^2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{T_i^n}{?\,t}$$

$$- \frac{K_i}{?\,x^2} T_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{?\,t} + \frac{2 \cdot K_i}{?\,x^2}\right) T_i^{n+1} - \frac{K_i}{?\,x^2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{T_i^n}{?\,t}$$

atau

$$A_i . T_{i-1}^{n+1} + B_i . T_i^{n+1} + C_i . T_{i+1}^{n+1} = D_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6.3)$$

dengan

$$A_i = -\frac{K_i}{?\,x^2} \qquad ; C_i = -\frac{K_i}{?\,x^2}$$

$$B_i = \left(\frac{1}{?\,t} + 2 \cdot \frac{K_i}{?\,x^2}\right) \quad ; D_i = \frac{T_i^n}{?\,t}$$

Apabila persamaan (6.3) ditulis untuk setiap titik hitungan dari i = 1 sampai M maka akan terbentuk suatu sisten persamaan linier yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode matriks.

Untuk :

$$i = 1 \quad ? \quad A_1T_0 + B_1T_1 + C_1T_2 = D_1$$
$$i = 2 \quad ? \quad A_2T_1 + B_2T_2 + C_2T_3 = D_2$$
$$i = 3 \quad ? \quad A_3T_2 + B_3T_3 + C_3T_4 = D_3$$
$$i = 4 \quad ? \quad A_4T_3 + B_4T_4 + C_4T_5 = D_4$$

.

.

$$i = M \qquad ? \quad A_MT_{M-1} + B_MT_M + C_MT_{M+1} = D_M$$

Untuk penyederhanaan penulisan, variabel T_i^{n+1} ditulis T_i (tanpa menulis n+1). Persamaan di atas dalam bentuk matrik menjadi :

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots A_M & B_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ . \\ . \\ T_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ . \\ . \\ D_M \end{bmatrix}$$

eksplisit vs implisit

Penyelesaian dengan menggunakan skema implisit lebih sulit dibanding dengan skema eksplisit. Kelebihan dari skema implisit adalah skema tersebut stabil tanpa syarat, langkah waktu ?t dapat dia mbil sembarang (besar) tanpa menimbulkan kesalahan pemotongan dalam batas-batas yang dapat diterima.

Penyelesaian dilakukan dengan mendiskretisasi suatu persamaan differensial parsial eliptik dengan kondisi batas untuk dapat ditransformasikan ke dalam suatu sistem dari N persamaan dengan N bilangan anu.

Penyelesaian persamaan eliptik dilakukan dengan langkah-langkah berikut ini.

1. Membuat jaringan titik simpul di dalam seluruh bidang yang ditinjau dan batas-batasnya.
2. Pada setiap titik dalam bidang tersebut dibuat turunan-turunannya dalam bentuk beda hingga.
3. Ditulis nilai-nilai fungsi pada semua titik di batas keliling bidang dengan memperhatikan kondisi batas.

penyelesaian persamaan eliptik

Dari persamaan bentuk eliptik berikut :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

laplace ....equation

Sehingga :

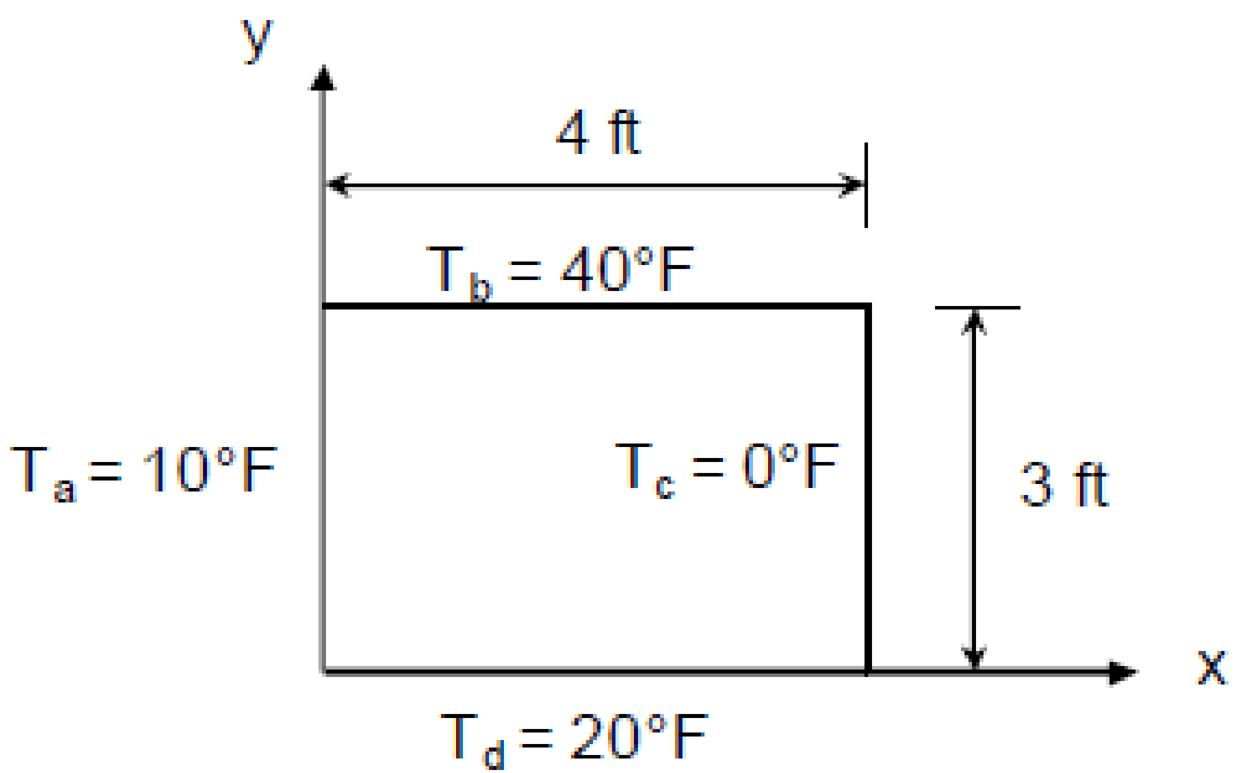
$$\frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

Untuk $\Delta x = \Delta y$, maka persamaan di atas menjadi :

$$4\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j+1} = 0$$

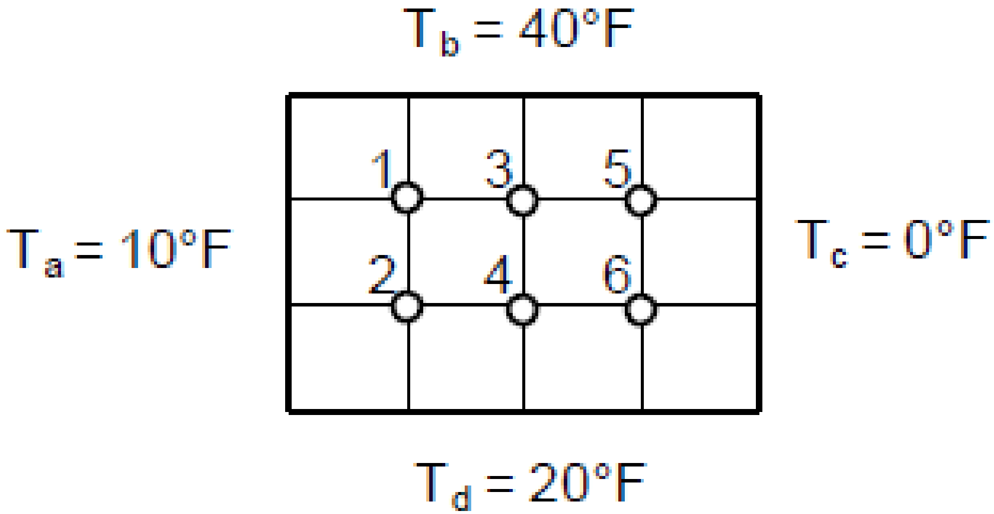
Contoh Soal :

Determine the steady state temperature of the following plate using a = 1 and ?x = 1 ft.

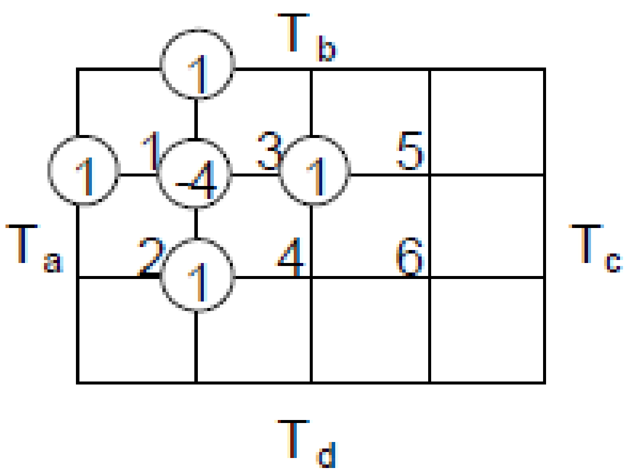


…dirichlet boundary

Jawab :

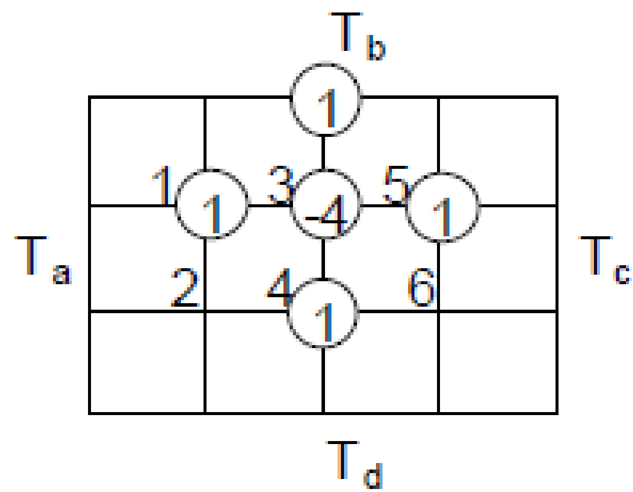


? **Node 1**



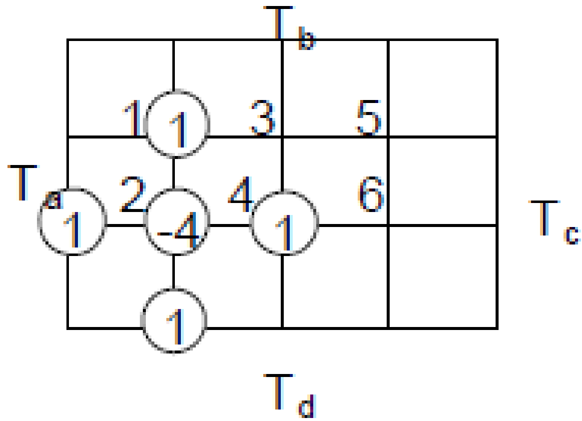
$$10 + 40 - 4\,T_1 + T_2 + T_3 = 0$$

? **Node 3**



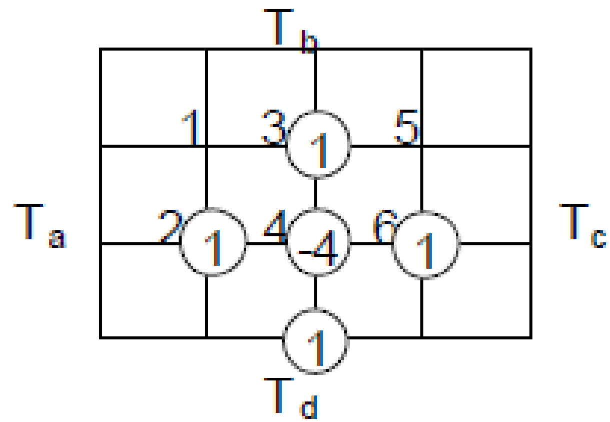
$$40 + T_1 - 4\,T_3 + T_4 + T_5 = 0$$

? **Node 2**



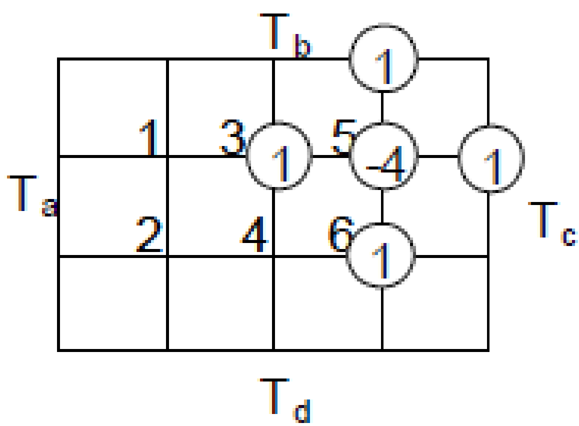
$$10 + 20 + T_1 - 4\,T_2 + T_4 = 0$$

? **Node 4**



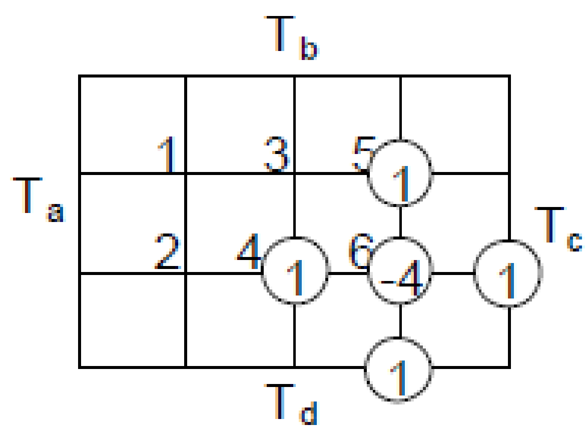
$$20 + T_2 + T_3 - 4\,T_4 + T_6 = 0$$

? **Node 5**



$$40 + T_3 - 4\,T_5 + T_6 = 0$$

? **Node 6**



$$20 + T_4 + T_5 - 4\,T_6 = 0$$

Sehingga hasil persamaan-persamaan tersebut dapat dibentuk dalam suatu matrik :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} T_1 &= 23{,}561\ ^{\circ}F \\ T_2 &= 18{,}344\ ^{\circ}F \\ T_3 &= 25{,}901\ ^{\circ}F \\ T_4 &= 19{,}814\ ^{\circ}F \\ T_5 &= 20{,}228\ ^{\circ}F \\ T_6 &= 15{,}010\ ^{\circ}F \end{aligned}$$